MỘT ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ TỐI ƯU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU KIỂU KUHN-TUCKER CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC TRONG KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

Trần Văn Sự

Khoa Toán, Trường Đại học Quảng Nam

*Email: vansudhdntt@gmail.com

Ngày nhận bài: 02/01/2018; ngày hoàn thành phản biện: 9/3/2018; ngày duyệt đăng: 8/6/2018

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng khái niệm của hàm khả vi theo hướng để thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu kiểu Kuhn-Tucker của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón. Đầu tiên chúng tôi chứng minh hàm khả vi theo hướng là lồi theo nón dưới giả thiết về tính lồi tổng quát. Tiếp theo chúng tôi cung cấp điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc trong các trường hợp các hàm mục tiêu khả vi theo hướng và khả vi Gateaux.

Từ khóa: Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc; Khả vi theo hướng; Khả vi Gateaux; Nghiệm hữu hiệu yếu.

1. MỞ ĐẦU

Hiện nay các điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ cùng với các trường hợp đặc biệt của nó đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, xem, chẳng hạn [1-6] và các tham khảo trong đó. F. Giannessi, G. Mastroeni và L. Pellegrini [1] đã nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc bằng cách quy về trường hợp bài toán không có ràng buộc; Xun-Hua Gong [4] thu được các điều kiện tối ưu nghiệm hữu hiệu yếu, hữu hiệu Henig, hữu hiệu toàn cục và siêu hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ dưới giả thiết về tính lồi tổng quát; Zhen-Fe Wei và Xun-Hua Gong [5] cung cấp các điều kiện tối ưu kiểu Kuhn-Tucker cho các loại nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ bằng cách dùng định lý tách các tập lồi rời nhau; X-H. Gong, W.T. Fu và W. Liu [6] nhận được điều kiện tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ trong không gian vectơ tôpô lồi địa phương, v.v… Trong các công trình nghiên cứu được mô tả bên trên ta thấy còn có một số vấn đề tồn đọng khi nghiên cứu điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc đó là sử dụng khái niệm của hàm khả vi theo hướng để nghiên cứu điều kiện tối ưu.

Bài báo được tổ chức như sau: Sau phần Giới thiệu chúng tôi cung cấp một số khái niệm về hàm lồi tổng quát, hàm khả vi theo hướng, hàm khả vi Gateaux làm cơ sở cho việc thiết lập kết quả về điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu kiểu Kuhn-Tucker của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón; một số ví dụ cũng được đề cập cho kết quả nhận được. Cuối cùng là một sự kết luận cho kết quả thu được.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Xuyên suốt bài báo này, nếu không nói gì thêm thì ta ký hiệu X, *Y* và *Z* là các không gian tôpô tuyến tính thực, trong đó *Y* và *Z* được sắp thứ tự bởi một nón lồi đóng nhọn có phần trong khác rỗng *C* và *K*, tương ứng. Cho X_0 là một tập con khác rỗng của X. Một song hàm $F: X_0 \times X_0 \to Y$ thỏa mãn $F(x_0, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in X_0$, và một hàm ràng buộc $g: X_0 \to Z.$ Đặt

$$S = \{x \in X_0 \colon g(x) \in -K\}$$

và gọi S là tập chấp nhận được hay tập ràng buộc của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón. Trường hợp ràng buộc nón trong một số tài liệu người ta còn gọi là ràng buộc bất đẳng thức tổng quát.

Gọi Y^* và Z^* lần lượt là các không gian đối ngẫu tôpô của *Y* và *Z.* Nón đối ngẫu của *C* và *K* được định nghĩa tương ứng bởi

$$C^+ = \{\xi \in Y^* \colon \xi(c) \geq 0 \quad \forall c \in C\},$$
$$K^+ = \{\eta \in Z^* \colon \eta(k) \geq 0 \quad \forall k \in K\}.$$

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc trong bài báo này được ký hiệu là CVEP và định nghĩa như sau: Tìm một vectơ $\bar{x} \in S$ sao cho

$$F(\bar{x}, x) \notin -\operatorname{int} C \quad \forall x \in S. \qquad (1)$$

Vectơ $\bar{x} \in S$ thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP.

Tiếp theo chúng ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết cho nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP.

Định nghĩa 2.1 ([4]**)** Cho $X_0 \subseteq X$ là một tập lồi khác rỗng. Một hàm $f: X_0 \to Y$ được gọi là C-lồi trên X_0, nếu với mọi $x, y \in X_0,\ t \in [0, 1]$ ta có

$$tf(x) + (1-t)f(y) \in f(tx + (1-t)y) + C.$$

Định nghĩa 2.2 ([3]**)** Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính thực; $X_0 \subseteq X$ là một tập con khác rỗng; $f: X_0 \to Y$ là một ánh xạ và điểm $\bar{x} \in X_0$.

(a) Với mỗi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$Df(\bar{x})(h) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}$$

tồn tại thì ta nói $Df(\bar{x})(h)$ là đạo hàm theo hướng của f tại điểm $\bar{x}$ theo hướng h. Nếu giới hạn này tồn tại với mọi $h \in X$, thì f được gọi là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x}$.

(b) Với mỗi $\bar{x} \in X_0$ và mọi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$Df(\bar{x})(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}$$

tồn tại và $Df(\bar{x}): X \to Y$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục, thì $Df(\bar{x})$ gọi là đạo hàm Gateaux của f tại điểm $\bar{x}$. Trong trường hợp này, hàm f được gọi là khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x}$.

Nhận xét 2.1 Dễ dàng thấy rằng nếu f khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x}$ thì nó khả vi theo hướng tại điểm đó. Tuy nhiên, chiều ngược lại sẽ không đúng bằng cách xét hàm số thực $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = |x|$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ tại $\bar{x} = 0$.

3. KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Đầu tiên chúng tôi cung cấp các bổ đề sau làm cơ sở cho chứng minh định lý chính.

Bổ đề 3.1 Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính thực và X_0 là một tập con lồi khác rỗng của X. Giả sử C là một nón lồi đóng trong Y và $f: X_0 \to Y$ khả vi theo hướng tại mọi điểm $\bar{x} \in X_0$. Khi đó, nếu f là C-lồi trên X_0 thì

$$f(x) - f(y) - Df(y)(x - y) \in C \quad \forall x, y \in X_0.$$

Chứng minh: Giả sử f là C-lồi trên X_0 và cố định $x, y \in X_0$. Với mọi $t \in (0, 1)$, ta có

$$tf(x) + (1-t)f(y) \in f(tx + (1-t)y) + C$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(y) - \frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \in C.$$

Lấy giới hạn khi $t \to 0+$, và sử dụng tính đóng của nón C ta được

$$f(x) - f(y) - \lim_{t \to 0+} \frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \in C.$$

Theo định nghĩa hàm khả vi theo hướng, ta suy ra

$$f(x) - f(y) - Df(y)(x - y) \in C.$$

Điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.2 Cho X, *Y* là các không gian tôpô tuyến tính thực. Giả sử rằng hàm $f : X \to Y$ là *C*- lồi và f khả vi theo hướng tại $\bar{x} \in X$. Khi đó ánh xạ

$$Df(\bar{x}) : X \to Y$$

là *C*- lồi.

Chứng minh: Với mọi $x, y \in X$, $t \in (0, 1]$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$ với $\lambda + \mu = 1$. Theo tính *C*- lồi của hàm f ta có biểu diễn sau:

$$\frac{f(\bar{x} + t(\lambda x + \mu y)) - f(\bar{x})}{t} = \frac{f\left(\lambda(\bar{x} + tx) + \mu(\bar{x} + ty)\right) - f(\bar{x})}{t}$$

$$\in \frac{\lambda f(\bar{x} + tx) + \mu f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})}{t} - C$$

$$= \frac{\lambda\left[f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})\right] + \mu\left[f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})\right]}{t} - C$$

$$= \lambda \frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})}{t} + \mu \frac{f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})}{t} - C.$$

Cho $t \to 0+$ và sử dụng tính đóng của nón *C* ta nhận được

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{x} + t(\lambda x + \mu y)) - f(\bar{x})}{t} \in \lambda \lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})}{t} + \mu \lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})}{t} - C.$$

Theo định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm f tại $\bar{x} \in X$, suy ra

$$\lambda Df(\bar{x})(x) + \mu Df(\bar{x})(y) \in Df(\bar{x})(\lambda x + \mu y) + C.$$

Áp dụng Định nghĩa 2.1, ta suy ra điều cần chứng minh. □

Trường hợp các hàm mục tiêu $F_{\bar{x}}$, g là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x} \in S$, một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP có thể được phát biểu như sau.

Định lý 3.3 Giả sử $\bar{x} \in S$, $F_{\bar{x}}(.) = F(\bar{x}, .) : X_0 \to Y$ là hàm $C-$lồi trên X_0, g là hàm $K-$lồi trên X_0 và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) \in -\operatorname{int} K$. Giả sử thêm rằng *C* và *K* là các nón lồi đóng nhọn có phần trong khác rỗng trong *Y* và *Z*, tương ứng và các ánh xạ $F_{\bar{x}}$, g là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x}$. Khi đó, vectơ $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP khi và chỉ khi tồn tại $\left(y^*, z^*\right) \in C^+ \times K^+$ với $y^* \neq 0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z^*(g(\bar{x})) = 0, \\ \min_{x \in X_0} \left[y^*{}_0 DF_{\bar{x}}(\bar{x}) + z^*{}_0 Dg(\bar{x})\right]\left(x - \bar{x}\right) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh.

Điều kiện cần. Sử dụng giả thiết kết hợp với kết quả thu được trong Bổ đề 3.2, ta khẳng định rằng $DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x})$ là $C-$lồi trên X_0 và $g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x-\bar{x})$ là $K-$lồi trên X_0. Ta chứng minh hệ bao hàm thức sau không có nghiệm trong X_0:

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) \in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) \in -\operatorname{int} K \end{cases}.$$

Ngược lại, ta giả sử rằng tồn tại $x \in X_0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) \in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) \in -\operatorname{int} K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{F_{\bar{x}}\left(\bar{x}+t(x-\bar{x})\right)-F_{\bar{x}}(\bar{x})}{t} \in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{g\left(\bar{x}+t(x-\bar{x})\right)-g(\bar{x})}{t} \in -\operatorname{int} K \end{cases}.$$

Vì int$C$ và int$K$ là các tập mở nên tồn tại $t_0 \in (0,1)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{F_{\bar{x}}\left(\bar{x}+t_0(x-\bar{x})\right)-F_{\bar{x}}(\bar{x})}{t_0} \in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+\dfrac{g\left(\bar{x}+t_0(x-\bar{x})\right)-g(\bar{x})}{t_0} \in -\operatorname{int} K \end{cases}.$$

Hệ bao hàm thức trên kéo theo

$$g\left(\bar{x}+t(x-\bar{x})\right) \in -\operatorname{int} K + (1-t_0)g(\bar{x}).$$

Do $\bar{x} \in S$ ta có $g(\bar{x}) \in -K \Leftrightarrow (1-t_0)g(\bar{x}) \in -K.$ Ngoài ra, vì K là một nón lồi có phần trong không rỗng nên dễ dàng thấy rằng

$$\operatorname{int} K + K = \operatorname{int} K.$$

Hệ quả là,

$$g\left(\bar{x}+t_0(x-\bar{x})\right) \in -\operatorname{int} K. \qquad (2)$$

Bởi vì X_0 là một tập con lồi và $\bar{x},\ x \in X_0,\ t_0 \in (0,1)$ nên từ (2) suy ra

$$\bar{x}+t_0(x-\bar{x}) \in S. \qquad (3)$$

Mặt khác, $F_{\bar{x}}(\bar{x})=0$ và $t_0 \operatorname{int} C=\operatorname{int} C,$ ta có

$$F_{\bar{x}}\left(\bar{x}+t_0(x-\bar{x})\right)\in -\operatorname{int} C. \qquad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $\bar{x}\in S$ không là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP (một sự mâu thuẫn!). Do đó, hệ bao hàm thức sau không thể có nghiệm trong X_0 :

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x})\in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x-\bar{x})\in -\operatorname{int} K \end{cases}.$$

Điều này nghĩa là

$$DF_{\bar{x}}(\bar{x})(X_0-\bar{x})\times\left(g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(X_0-\bar{x})\right)\bigcap\left(-\operatorname{int} C\right)\times\left(-\operatorname{int} K\right)=\phi.$$

Do đó,

$$\left(DF_{\bar{x}}(\bar{x})(X_0-\bar{x})+C\right)\times\left(g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(X_0-\bar{x})+K\right)\bigcap\left(-\operatorname{int} C\right)\times\left(-\operatorname{int} K\right)=\phi.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $x_0\in X_0,\ c\in C$ và $k\in K$ sao cho

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x_0-\bar{x})+c\in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x})+k\in -\operatorname{int} K \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x_0-\bar{x})\in -\operatorname{int} C-c \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x})\in -\operatorname{int} K-k \end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x_0-\bar{x})\in -\operatorname{int} C \\ g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x})\in -\operatorname{int} K \end{cases}$$

bởi vì

$$-\operatorname{int} C-c\subset -\operatorname{int} C-C=-\operatorname{int} C$$

và

$$-\operatorname{int} K-k\subset -\operatorname{int} K-K=-\operatorname{int} K.$$

Khẳng định trên kéo theo

$$DF_{\bar{x}}(\bar{x})(X_0-\bar{x})\times\left(g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(X_0-\bar{x})\right)\bigcap\left(-\operatorname{int} C\right)\times\left(-\operatorname{int} K\right)\neq\phi,$$

một sự mâu thuẫn! Mặt khác, theo khẳng định ban đầu ta có $\left(DF_{\bar{x}}(\bar{x})(X_0-\bar{x})+C\right)$ và $\left(g(\bar{x})+Dg(\bar{x})(X_0-\bar{x})+K\right)$ là các tập lồi nên tích của chúng cũng là một tập lồi. Sử dụng định lý tách các tập lồi rời nhau, ta tìm được $\left(y^*,\ z^*\right)\in Y^*\times Z^*$ với $\left(y^*,\ z^*\right)\neq\left(0,\ 0\right)$ sao cho

$$< y^*, -c > + < z^*, -k > \le < y^*, DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) > + < z^*, g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) + k >$$

với mọi $c \in C,\ k \in K,\ x \in X_0.$

Điều này dẫn đến kết quả hiển nhiên sau: $y^* \in C^+,\ z^* \in K^+$ và

$$0 \le < y^*, DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) > + < z^*, g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) > \ \forall x \in X_0.$$

Chọn $x = \bar{x}$ ta được $< z^*, g(\bar{x}) > \ge 0.$ Lại vì $z^* \in K^+,\ g(\bar{x}) \in -K,$ suy ra

$$< z^*, g(\bar{x}) > \le 0 \Leftrightarrow < z^*, g(\bar{x}) > = 0.$$

Theo giả thiết ban đầu: tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) \in -\operatorname{int} K$ ta suy ra $y^* \ne 0.$ Điều này cũng dẫn đến kết quả thu được cho điều kiện cần.

Điều kiện đủ. Sử dụng Bổ đề 3.1, ta suy ra hệ sau đúng với mọi $x \in X_0$:

$$\begin{cases} F_{\bar{x}}(x) - DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) \in C, \\ g(x) - g(\bar{x}) - Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) \in K \end{cases}.$$

Hệ quả là: với mọi $x \in X_0$ ta có

$$< y^*, F_{\bar{x}}(x) > + < z^*, g(x) > \ge \min_{x \in X_0} \left[y^*{}_0 DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x-\bar{x}) + z^*{}_0 Dg(\bar{x})(x-\bar{x}) \right] = 0. \quad (5)$$

Do đó, $\bar{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán CVEP. Thật vậy, giả sử trái lại với khẳng định này rằng, tồn tại $x_0 \in S$ sao cho

$$F_{\bar{x}}(x_0) \in -\operatorname{int} C,$$

suy ra

$$< y^*, F_{\bar{x}}(x_0) > < 0. \qquad (6)$$

Không khó để thấy rằng

$$< z^*, g(x_0) > \le 0. \qquad (7)$$

Cộng (6) và (7) vế theo vế ta được

$$< y^*, F_{\bar{x}}(x_0) > + < z^*, g(x_0) > < 0,$$

một sự mâu thuẫn với (5).

Định lý được chứng minh đầy đủ. □

Nhận xét 3.4 Điều kiện các nón C và K có phần trong khác rỗng trong Định lý 3.3 là không thể bỏ qua được. Trong trường hợp nón C có phần trong bằng rỗng, nghiệm $\bar{x}$ phải được định nghĩa dưới một loại nghiệm khác là nghiệm hữu hiệu của bài toán CVEP và lúc này hướng nghiên cứu điều kiện tối ưu của bài toán cân bằng vectơ cũng sẽ khác đi, bởi vì chúng ta không thể sử dụng định lý tách thông thường được. Điều kiện $\operatorname{int} K \neq \phi$ đảm bảo điều kiện chính quy thỏa mãn và trong trường hợp này tập chấp nhận được $S = \{x \in X_0 : g(x) \in -K\}$ luôn khác rỗng, bởi vì g là hàm lồi theo nón K. Do đó, giả thiết g là hàm $K-$lồi trên tập lồi X_0 phải được đảm bảo. Ngoài ra, để áp dụng Bổ đề 3.2, tính $C-$lồi trên X_0 của hàm $F_{\bar{x}}(.) : X_0 \to Y$ cũng phải được thỏa mãn. Chú ý rằng, trường hợp bài toán cân bằng vectơ không trơn trong đó các hàm mục tiêu không lồi, chúng ta có thể sử dụng công cụ hiện đại hơn để nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán CVEP có thêm ràng buộc đẳng thức, chẳng hạn như chúng ta có thể sử dụng các ngôn ngữ của đạo hàm tiếp liên (Contingent Derivatives), trên/ dưới đạo hàm tiếp liên (Contingent Epiderivatives/Hypoderivatives), đạo hàm Studniarski, đạo hàm theo hướng kiểu Páles-Zeidan, đạo hàm theo hướng Hadamard, dưới vi phân suy rộng (Convexificators), dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel-Penot, dưới vi phân Mordukhovich, tính chính quy metric và sự độc lập tuyến tính của các đạo hàm Fréchet, v.v...

Trường hợp các hàm mục tiêu $F_{\bar{x}}$, g là khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x} \in S$, ta cũng thu được một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP và có thể được mô tả như sau.

Định lý 3.5 Giả sử $\bar{x} \in S$, $F_{\bar{x}}(.) = F(\bar{x}, .) : X_0 \to Y$ là hàm $C-$lồi trên X_0, g là hàm $K-$lồi trên X_0 và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) \in -\operatorname{int} K$. Giả sử thêm rằng C và K là các nón lồi đóng nhọn có phần trong khác rỗng trong Y và Z, tương ứng và các ánh xạ $F_{\bar{x}}$, g là khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x}$. Khi đó, vectơ $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán CVEP khi và chỉ khi tồn tại $\left(y^*, z^*\right) \in C^+ \times K^+$ với $y^* \neq 0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z^*(g(\bar{x})) = 0, \\ \min\limits_{x \in X_0} \left[y^*{}_0 DF_{\bar{x}}(\bar{x}) + z^*{}_0 Dg(\bar{x}) \right]\left(x - \bar{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Kết quả thu được của Định lý 3.4 trên dựa vào Định lý 3.3 và Nhận xét 2.1. Điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.6 Xét $X = \mathbb{R}^2, Y = Z = \mathbb{R}, C = K = \mathbb{R}_+, \bar{x} = (0, 0)$, $X_0 = \{(x,y) \in X : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Các ánh xạ F_x, $g : X_0 \to \mathbb{R}$ được xác định lần lượt bởi

$$F_{\bar{x}}(x, y) = |y| \;\; \forall (x, y) \in X_0,$$
$$g(x, y) = |y| - x \;\; \forall (x, y) \in X_0.$$

Ta dễ dàng tính được

$$S = \{(x,y) \in X_0 : |y| \le x\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}\},$$

$$DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x,y) = |y|, \quad Dg(\bar{x})(x,y) = |y| - x.$$

Do đó, tất cả các giả thiết của Định lý 3.3 được thỏa mãn và hơn nữa, $\bar{x} = (0,0)$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của CVEP.

Chọn $y^* = 1,\ z^* = 0$ và ta tính được

$$\min_{x \in X_0} \left[y^*{}_0 DF_{\bar{x}}(\bar{x}) + z^*{}_0 Dg(\bar{x}) \right]\left((x,y) - \bar{x}\right) = \min_{x \in X_0} |y| = 0.$$

Điều này kết thúc việc kiểm tra.

Chú ý 3.6 Điều kiện tối ưu trong các Định lý 3.3 và 3.5 trên là thuộc kiểu Kuhn-Tucker bởi vì $y^* \neq 0$.

4. KẾT LUẬN

Kết quả đạt được trong bài báo này là mới và các kết quả thu được này là cơ sở để nghiên cứu ứng dụng cho điều kiện cần và đủ tối ưu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc, bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc và một số mô hình kinh tế kỷ thuật khác với các hàm khả vi theo hướng trong không gian vô hạn chiều. Kết quả thu được trên cũng được sử dụng cho việc thiết kế thuật toán tìm nghiệm tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] [1]. F.Giannessi, G. Mastroeni, L. Pellegrini (2000), "On the theory of vector optimization and variational inequalities, image space analysis and separation, in: Vector variational inequalities and vector equilibria: Mathematical theories, F. Giannessi (ed.)", *Kluwer, Dordrecht*, pp. 153-215.

[2] [2]. L. J. Lin (1994), "Optimization of set-valued functions", *J. Math. Anal. Appl., 186*, pp. 30-51.

[3] [3]. J. Jahn (2011), "Theory, Applications and Extensions Second Edition Vector Optimization", *Springer-Verlag Berlin Heilelberg*.

[4] [4]. Xun-Hua Gong (2008), "Optimality conditions for vector equilibrium problems", *J. Math. Anal. Appl., 342*, pp. 1455-1466.

[5] [5]. Zhen-Fe Wei, Xun-Hua Gong (2010), "Kuhn-Tucker optimality conditions for vector equilibrium problems", *J. Ine. Appl.*, Doi: 10.1155/2010/842715.

[6] [6]. Xun-Hua Gong, W.T. Fu, W.Lin (2000), "Super efficiency for a vector equilibrium in locally convex topological vector spaces", *Mathematical Theories, Kluwer, Dordrecht*, pp. 233-252.

A KUHN-TUCKER NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITION FOR WEAKLY EFFICIENT SOLUTIONS OF CONSTRAINED VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

Tran Van Su

Department of mathematics, University of Quang Nam

Email: vansudhdntt@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we use the concept of directionally differential function for establishing the Kuhn-Tucker type necessary and sufficient optimality conditions for weakly efficient solutions of vector equilibrium problems with constraints involving cone and set constraints. We first prove that the directionally differential function is cone-convex under the assumptions on general convexity. We then obtain the necessary and sufficient optimality conditions for weakly efficient solutions of constrained vector equilibrium problem in the cases of directionally and Gateaux differentionals.

Keywords: Vector equilibrium problems with constraints; Directionally differential; Gateaux differentional; Weakly efficient solutions

Trần Văn Sự sinh ngày 28/04/1983 tại Quảng Nam. Năm 2005, ông tốt nghiệp cử nhân ngành sư phạm Toán tin tại Trường Đại học Sư phạm Đà Nẵng. Năm 2008, ông tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Toán Giải tích tại trường Đại học Khoa học, Đại học Huế. Năm 2018, ông tốt nghiệp tiến sĩ chuyên ngành Toán ứng dụng tại Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Từ năm 2009 đến nay, ông là giảng viên tại khoa Toán của Trường Đại học Quảng Nam.

Lĩnh vực nghiên cứu: toán ứng dụng, đặc biệt là hướng nghiên cứu về các điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ cùng với một số ứng dụng cho mô hình bài toán cân bằng Nash-cournot, mô hình bài toán sản xuất vận tải, v.v.